$$\det A^j = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_1 x_1 + \cdots + a_{1,n} x_n & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,1} x_1 + \cdots + a_{n,n} x_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,k} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,k} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= x_j \det A$$

On obtient donc $x_j = \dfrac{\det A^j}{\det A}$

CH9 VECTEURS PROPRES ET DIAGONALISATION

- Pour tout le chapitre,
  - $\mathbb{K}$ sera un corps commutatif
  - V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
  - $A \in End(V)$ un opérateur linéaire sur V
  - ie : $A : V \to V$ application linéaire
- Dans ce chapitre, nous voulons une base E telle que $[A]_{E,E} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ soit diagonale. ⚠ Elle n'existe pas toujours

9.1 VECTEURS, VALEURS ET SOUS-ESPACES PROPRES

Def Un vecteur v est un vecteur propre si $A(v) = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

$\Leftrightarrow$ $\{v, A(v)\}$ n'est pas une partie libre

$\Leftrightarrow$ $v = 0$ ou $v \neq 0$, et $A(v)$ est la droite engendrée par v

$\Leftrightarrow$ $v = 0$ ou $v \neq 0$, et A agit comme une homothétie sur $\langle v \rangle$

$\to$ remarque : 0 est tjs un vecteur propre. En effet,

$A(0) = 0 = \lambda . 0$

Def $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $\exists v \in V, v \neq 0$ tq

$A(v) = \lambda v$

Def On définit le spectre de A comme

$$\mathrm{spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}$$

→ c'est l'ensemble des valeurs propres de A.

Prop 9.5 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble $V_\lambda := \{v \in V \mid A(v) = \lambda v\}$ est un sous-espace de V

DEMO

$$A(v) = \lambda v \Leftrightarrow A(v) = (\lambda \, Id)(v)$$
$$\Leftrightarrow A(v) - (\lambda \, Id)(v) = 0$$
$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)(v) = 0$$

Donc $V_\lambda = \{v \in V \mid (A - \lambda Id)(v) = 0\} = \underbrace{\mathrm{Ker}(A - \lambda Id)}_{\text{Tjs un sous-espace!}}$

⊙ Remarque : $\lambda \in \mathrm{spec}(A) \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0 : A(v) = \lambda v$

$\Leftrightarrow \exists v \in, v \neq 0 : (A - \lambda Id)(v) = 0$

$\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda Id) \geq 1$

Si $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$, on appelle V_λ le sous-espace propre associé à λ

$\lambda \in \mathbb{K}$ <
- $\mathrm{Ker}(A - \lambda Id) = \{0\}$ λ PAS valeur propre
- $\mathrm{Ker}(A - \lambda Id) \neq \{0\}$ λ valeur propre
  $\Updownarrow$
  $\dim(\mathrm{Ker}\, A - \lambda Id) \geq 1$

Prop Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathrm{Spec}(A)$ des valeurs propres distinctes. Si $\forall i = 1, \ldots, m$: B_i partie libre de V_{λ_i}, alors $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ est une partie libre

DEMO Nous traitons le cas $|B_1| = |B_2| = \ldots = |B_m| = 1$

Par induction sur m :

Cas de base : $m = 1$, alors $\bigcup_I B_i = B_1$ est libre hypothèse

Cas +1 : Supposons que c'est vrai pour $< m$ valeurs propres.

Posons $B_1 = \{v_1\}, \ldots, B_m = \{v_m\}$ avec $v_i \in V \setminus \{0\}$

Supposons $\sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i = 0$ avec $\mu_i \in \mathbb{K}$

Trouvons un opili B tq $B(v_1) = 0$ Prenons alors $B = A - \lambda Id$

Alors $B(v_1) = (A - \lambda Id)(v_1) = \underbrace{A(v_1)}_{= \lambda v_1} - \lambda Id(v_1) = 0$

Appliquons B au deux côté de l'équation :

$$B\Big(\sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i\Big) = \underbrace{B(0)}_{=0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \mu_i B(v_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=2}^{m} \mu_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = 0$$

car $B(v_1) = 0$

Par l'hypothèse d'induction : $\mu_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{\neq 0} = 0 \quad \forall i = 2, \dots, m$

$\Rightarrow \mu_i = 0 \quad \forall i = 2, \dots, m$

Or, par le cas 1, $\mu_1 = 0$ et donc $\mu_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

Donc $\{v_1, \dots, v_m\} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m$ est libre

3.2 L'EQUATION CARACTERISTIQUE

Théorème

Supposons que $\dim V = n$

① λ est une valeur propre $\Leftrightarrow \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0$

② $\det(A - \lambda \mathrm{Id})$ est un polynome en λ et le coefficient de $\begin{cases} \lambda^n \text{ est } (-1)^n \\ \lambda^{n-1} \text{ est } (-1)^{n-1} \cdot \overbrace{\mathrm{Tr}(A)}^{\text{trace de } A} \end{cases}$ pour $\lambda = 0$, $P(0) = \det(a)$

③ A possède au plus n valeurs propres $\neq$, qui sont les racines de l'équation $\underbrace{\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0}_{\text{equation caractéristique pour } A}$

$\to$ On appelle polynome caractéristique $\det(A - \lambda \mathrm{Id})$

DEMO

① $\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{Id})$ contient $v \neq 0$

$\Leftrightarrow A - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0$

③ $|\mathrm{Spec}(A)| \leq n$ car si A possède m valeurs propres distinctes, alors V possède une partie libre de m vecteurs $\Rightarrow \underbrace{\dim(V)}_{=n} \geq m$

② Prenons une base qlq E et posons $a := [A]_{E,E}$

$\Rightarrow [A - \lambda I]_{E,E} = a - \lambda I$

Donc on a $\det(A - \lambda I) = \det(a - \lambda I)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot (a_{1\sigma(1)} - \lambda \delta_{1\sigma(1)}) \cdots (a_{n\sigma(n)} - \lambda \delta_{n\sigma(n)})$$

$\to n!$ terme, chacun = polynome en λ de degré $\leq n$ points fixes $(= |\{i \mid \sigma(i) = i\}|)$

→ Pour $\sigma = Id$: $(+1)(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)$
est un polynome de degré n en λ,
- coeff $\lambda^n = (-1)^n$
- coeff $\lambda^{n-1} = (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})}_{\text{Tr } A}$

9.3 OPERATEURS ET MATRICES DIAGONALISABLES

Def : $A \in End(V)$ est diagonalisable si V possède une base de vecteurs propres.

En dim finie n, A est diagonalisable $\Leftrightarrow$
$\exists$ base E tq $[A]_{E,E} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Pro : Si A possède $n = \dim V$ valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

DEMO : Appelons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ les valeurs propres avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$.
Pour chaque λ_i, prenons $e_i \in V_{\lambda_i}$, avec $e_i \neq 0$
Comme les e_i sont linéairement indépendants, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ forme une base de vecteurs propres.

exemple : $[A]_{F,F} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & \pi \end{pmatrix}$ $spec(A) = \{1, 2, \pi\}$

Pro : Soit $\dim V = n$. Si A est diagonalisable, alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors
$\det(A - \lambda Id) = P_A(\lambda) = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)}_{\text{Produit de polynome de degré 1}} \in \mathbb{K}[\lambda]$

DEMO : Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de vecteurs propres. alors
$[A]_{E,E} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{:= a} \Rightarrow \det(a - \lambda I) = \det(a - \lambda I)$
$= (\lambda_1 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$

ex : $[A]_{F,F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ un cisaillement.
alors $\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$ $spec(A) = \{1\}$
Mais A n'est pas diagonalisable.

⊙ Obstacles à la diagonalisation

→ Obstacle algebrique : P_A n'est pas factorisable
→ Obstacle géométrique : Pas assez de vecteurs propres pour une base

Def La multiplicité algébrique d'une valeur propre $\mu \in \mathrm{Spec}(A)$

$= \#$ de fois que μ est racine de $P_A(\lambda)$

$= \max\{k \in \mathbb{N} \mid (\mu - \lambda)^k \text{ divise } P_A(\lambda)\}$

Def La multiplicité géométrique d'une valeur propre $\mu \in \mathrm{spec}(A)$

$= \dim(V_\mu)$

Remarque : $\forall A \in \mathrm{End}(V)$, $\forall \mu \in \mathrm{Spec}(A)$:

$$\text{mult. géom}(\mu) \leq \text{mult. alg.}(\mu)$$

Thé Supposons $\dim V = n$ finidimentionnel. Alors

① A est diagonalisable $\Leftrightarrow$

② $\sum_{\mu \in \mathrm{Spec}(A)} \text{mult. géométrique}(\mu) = n$ $\Leftrightarrow$

③ $\sum_{\mu \in \mathrm{spec}(A)} \text{mult. alg.}(\mu) = n$ et $\text{mult. géom}(\mu) = \text{mult alg.}(\mu)$ $\forall \mu \in \mathrm{spec}(A)$

Def Une matrice $a \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable si $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto ax$ est diagonalisable.

Théorème $a \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exists\, b \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible tq $b^{-1}ab$ est diagonale

DEMO cf sylla : les colonnes de la matrice b définissent une base de vecteurs propres !

9.4 OPERATEURS ET MATRICES TRIANGULABLES

Def $A \in \mathrm{End}(V)$ est triangulable s'il existe une base E de V tq $a : [A]_{E,E}$ est triangulaire $a \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ 0 & & \ddots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

Def $a \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ est triangulable si $\exists\, b \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible tq $b^{-1}ab$ est triangulaire

Def Un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ est invariant par A si :

$$A(W) \subseteq W$$

ex : ① si W est une droite invariante, alors W est un sous-espace propre.

② V tout entier est tjs invariant

Def — Supposons dim $V = n$. Un drapeau maximal invariant par A est une chaîne de $n+1$ sous-espaces invariants emboîtés

$$\underset{\{0\}}{W_0} \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \underset{V}{W_n}$$

avec $\dim(W_i) = i$, $\forall i = 1, \dots, n$

Pro — A est triangulable $\Leftrightarrow$ $\exists$ drapeau maximal invariant par A

DEMO

($\Rightarrow$) Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base tq

$$[A]_{E,E} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors $\{0\} \subsetneq \langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \subsetneq \cdots \subseteq \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ est un drapeau max. invariant par A.

($\Leftarrow$) Soit $W_0 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n$ un drapeau max. invariant.

Prenons $e_i \in W_i \setminus W_{i-1}$ pour chaque $i = 1, \dots, n$.

Alors $\left.\begin{array}{l} W_1 = \langle e_1 \rangle \\ \vdots \\ W_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \end{array}\right\}$ et $[A]_{E,E} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

Théorème — $A \in \mathrm{End}(V)$ est triangulable $\Leftrightarrow$ $P_A(\lambda)$ est factorisable en un produit de polynômes de deg $= 1$, à coeff. dans $\mathbb{K}$

$\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tq $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$

DEMO voir syllabus et comprendre

CH10 - FORME NORMAL DE JORDAN

Dans ce chapitre : $\mathbb{K}$ sera un corps commutatif, V un esp. vect sur $\mathbb{K}$, de dimension finie n et $A \in \mathrm{End}(V)$ un opé. $A : V \to V$ linéaire.

- Rappel :

① A est triangulable $\Leftrightarrow$ $\exists$ base E tq $[A]_{E,E} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\det(A - xI) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \dots (\lambda_n - x)$

② Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors A est toujours triangulable

- But : Montrer que si A est Δ, $\exists$ base F tq

$$[A]_{F,F} = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

blocs de Jordan